Logikk

Logikk er viktig i mange sammenhenger, for eksempel når vi skal argumentere for en sak, når vi skal bygge, programmere og bruke datamaskiner og når vi skal gjennomføre bevis i matematikken.

Logikkens historie kan føres over 2000 år tilbake. Den som først formulerte de reglene vi i dag samlet kaller logikk, var Aristoteles, født år 384 f.Kr. Aristoteles betegnes ofte som "den formelle logikkens far".

Utsagn

Et viktig begrep i logikken er begrepet utsagn. Som gyldige utsagn i kan vi stille opp en hvilken som helst påstand, enten den er sann eller gal, for eksempel at Island er en øy (et sant utsagn), at Paris er hovedstaden i Polen (et galt utsagn) og at $6>3$ (et sant utsagn).

I logikken er det videre vanlig å navngi utsagn med bokstaver, dvs. å bruke logiske variabler. Mens matematiske variabler ofte angis med bokstavene x, y, z, er det vanlig å bruke bokstavene p, q, r osv. for logiske variabler.

Når vi vurderer sannheten i et utsagn, sier vi at vi gir utsagnet sannhetsverdi. Et gitt utsagn kan altså anta en av to mulige verdier, galt (som vi forkorter til g) eller sant (som vi forkorter til s).

Hvis vi definerer utsagnene p og q slik (< leses ”mindre enn” og > ”større enn”):

p: $6 < 3$
q: $6 > 3$

må p få sannhetsverdien galt og q sannhetsverdien sant, dvs. at p har verdien g og q verdien s.

Åpne utsagn

Utsagnet

p: $A > 3$ (A > 3 leses ”A er større enn 3”)

er et eksempel på et åpent utsagn. Utsagnet kalles åpent fordi sannhetsverdien her er avhengig av verdien til A. Vi må først få vite (finne) verdien til A før vi kan bestemme om p har verdien g eller s.

Sammensatte utsagn

Gitt to utsagn

p: $A > 3$
q: $B < 6$

Utsagnet p kan ha én av to mulige sannhetsverdier, avhengig av A. Det samme gjelder for q, avhengig av B. Ved å sette operatoren $\wedge$ (leses "og") mellom de to utsagnene, får vi et eksempel på et sammensatt utsagn:

$p \wedge q$: $A > 3 \wedge B < 6$

p og q er logiske operander. $\wedge$ er en logisk operator. Sammenlign med det aritmetiske uttrykket $x \cdot y$. I utrykket er x og y aritmetiske operander. Multiplikasjonstegnet $\cdot$ er en aritmetisk operator. Vi vet at den operasjonen som utføres med operatoren $\cdot$ kalles multiplikasjon. Den operasjonen som utføres med den logiske operatoren $\wedge$, har fått navnet konjunksjon.

Konjunksjon (OG)

La oss igjen se på uttrykket $p \wedge q$ som leses "p og q" og kalles en konjunksjon.

$p \wedge q$: $A > 3 \wedge B < 6$

Et sammensatt utsagn kan selvfølgelig, i likhet med et enkelt utsagn, bare ha en av to mulige verdier, galt eller sant, g eller s. Ut fra vanlig språkforståelse innser vi at utsagnet $A > 3 \wedge B < 6$ ($A > 3$ og $B < 6$) er sant (påstanden er sann) dersom det både er sant at $A > 3$ og samtidig at $B < 6$. Vi krever altså at dersom konjunksjonen $p \wedge q$ skal få verdien s (sann), så må p være sant og q være sant. Dersom utsagnene p eller q eller begge har verdien g (galt), må også $p \wedge q$ få verdien g.

For å få dette satt opp litt oversiktlig, bruker logikken sannhetsverditabeller.
Sannhetsverditabellen for konjunksjon er slik:

Konjunksjon		
p	q	$p \wedge q$
g	g	g
g	s	g
s	g	g
s	s	s

De to første rubrikkene

p	**q**
g	g
g	s
s	g
s	s

viser oss samtlige (fire) mulige kombinasjoner av sannhetsverdiene g og s til utsagnene p og q. Tabellen forteller oss at for alle kombinasjoner, unntatt p = s og q = s, er $p \wedge q$ g (galt). Bare når p = s og q = s, er konjunksjonen eller det sammensatte utsagnet $p \wedge q$ s (sant).

Disjunksjon (ELLER)

Gitt to utsagn p og q. Disjunksjonsoperatoren skrives $\vee$ og leses "eller". Operasjonen disjunksjon gir altså et sammensatt utsagn av type $p \vee q$ som vi leser ”p eller q”.

Eksempel.

p: $A > 3$
q: $B < 6$

$p \vee q$: $A > 3 \;\vee\; B < 6$

Vanlig språkforståelse forteller oss vel også her hva vi må kreve for å si at det sammensatte utsagnet $p \vee q$ er galt og for å si at det sant. Dersom ett av de to utsagnene p og q er sant, er det sant at A er større enn 3 eller at B er mindre enn 6. $p \vee q$ er også sant når både p og q er sanne.

Dette gir oss følgende sannhetsverditabell for disjunksjon:

Disjunksjon		
p	**q**	**p $\vee$ q**
g	g	g
g	s	s
s	g	s
s	s	s

Tabellen forteller oss at for alle kombinasjoner, unntatt p = g og q = g, er p $\vee$ q s (sant). Bare når p = g og q = g, er disjunksjonen eller det sammensatte utsagnet p $\vee$ q g (galt).

En disjunksjon er altså sann dersom minst ett utsagn er sant, dvs. også når begge operandene er sanne. Det siste gjelder ikke for en eksklusiv disjunksjon.

Eksklusiv disjunksjon
(ELLER, MEN IKKE BEGGE)

Operasjonen eksklusiv disjunksjon skrives a og uttales ”eller, men ikke begge”

p a q: p eller q, men ikke begge.

Dette gir at sannhetsverditabellen for operasjonen eksklusiv disjunksjon må se slik ut:

Eksklusiv disjunksjon		
p	**q**	**p** a **q**
g	g	g
g	s	s
s	g	s
s	s	g

En eksklusiv disjunksjon er sann hvis ett og bare ett av utsagnene er sanne.

Negasjon (IKKE)

Negasjonsoperatoren skrives $\neg$ og leses "ikke". Operasjonen negasjon er enkel, vi setter $\neg$ (ikke) foran et utsagn og får det "motsatte" utsagnet.

Eksempel.

p: A > 3
$\neg$p: Det er ikke slik at A > 3

Det skulle være greit å innse at sannhetsverditabellen for negasjon må se slik ut:

Negasjon	
p	**$\neg$p**
g	s
s	g

Implikasjon (HVIS-SÅ)

Symbolet for den logiske operasjonen implikasjon er $\Rightarrow$ eller $\rightarrow$. Det leses "hvis – så", "impliserer" eller "medfører".

p $\rightarrow$ q: "Hvis p, så q" eller "p impliserer q" eller "p medfører q"

Måten å bruke hvis-så-setninger i dagligtalen på, er så mangfoldig at sannhetsverditabellen her ikke er innlysende. Den er vedtatt slik:

Implikasjon		
p	**q**	**p$\rightarrow$q**
g	g	s
g	s	s
s	g	g
s	s	s

Implikasjon p $\rightarrow$ q er sann for alle verdikombinasjonene bortsett fra p = s og q = g. Denne kombinasjonen er vedtatt å gi verdien g for å markere at hvis premissene er sanne, så skal konklusjonen ikke kunne bli gal. At implikasjonen p $\rightarrow$ q er sann når premisset p er galt, er "logisk". Et galt premiss gir en uinteressant konklusjon som kan være gal eller sann.

Det er den fjerde og siste linjen i sannhetsverditabellen som er mest interessant. Fra noe sant skal vi kunne utlede ny sannhet, for eksempel ny matematikk som vi kan stole på.

Ekvivalens (HVIS OG BARE HVIS)

Symbolet for den logiske operasjonen ekvivalens er $\Leftrightarrow$ eller $\leftrightarrow$. Det leses ”hvis og bare hvis” eller ”er ekvivalent med”.

$p \leftrightarrow q$: ”p hvis og bare hvis q” eller ”p er ekvivalent med q”

Dobbelpilen $\leftrightarrow$ forteller oss at vi kan se på en ekvivalens som to implikasjoner.

Ekvivalensen $p \leftrightarrow q$ er en komprimering av de to implikasjonene $p \rightarrow q$ og $q \rightarrow p$.

Det gir at sannhetsverdien for den logiske operasjonen ekvivalens må se slik ut:

Ekvivalens		
p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
g	g	s
g	s	g
s	g	g
s	s	s

En ekvivalens er altså sann hvis og bare hvis både p og q har den samme sannhetsverdien.

Du kjenner nå de elementære operasjonene i logikk. Alle er viktige når vi utleder ny matematikk, spesielt operasjonen implikasjon. Den siste linjen i sannhetsverditabellen for implikasjon forteller oss at vi fra noe som er sant, kan utlede ny sannhet. Mer om det i det neste avsnittet.

Logikk i matematiske resonnement og bevis

Et enkelt matematisk resonnement kan være følgende implikasjon:

$a = b \;\rightarrow\; a^2 = b^2$

Implikasjonen leser vi ”hvis $a = b$, så er $a^2 = b^2$”.

Sannhetsverditabellen for implikasjon ser slik ut:

Implikasjon		
p	**q**	**p→q**
g	g	s
g	s	s
s	g	g
s	s	s

Det er spesielt de to siste linjene som er interessante i forbindelse med matematiske bevis, men la oss først kommentere de to øverste.

Når vi sier ”hvis $a = b$, så er $a^2 = b^2$” og mener at det er sant, så godtar vi vel at hvis a ikke er lik b, så kan det hende at a^2 ikke er lik b^2. Dermed er det ”logisk” at den første linjen i sannhetsverditabellen konkluderer med sannhetsverdien s.

Men det kan forekomme at det er sant at $a^2 = b^2$ selv om a ikke er lik b, for eksempel hvis a = –3 og b = 3. Dermed er det også ”logisk” at den andre linjen i sannhetsverditabellen konkluderer med sannhetsverdien s.

Derimot må den tredje linjen i tabellen få sannhetsverdien g. Fra noe som er sant skal vi ikke logisk kunne utlede noe som er galt.

Den fjerde linjen er grei. Fra noe som er sant skal vi kunne utlede ny sannhet. Den fjerde linjen må konkludere med sannhetsverdien s. Dermed er det den fjerde linjen som gjør at vi får ny matematikkunnskap med implikasjonen $a = b \;\rightarrow\; a^2 = b^2$.

Men hva med implikasjonen $a^2 = b^2 \;\rightarrow\; a = b$? Er den sann (får den sannhetsverdien s)? Dersom vi kan finne minst ett eksempel på at premisset $a^2 = b^2$ er sant, samtidig som konklusjonen $a = b$ er gal, må vi forkaste implikasjonen. Da har vi situasjonen i linje 3 i sannhetsverditabellen. Fra noe sant skal vi ikke kunne utlede noe galt. Et slikt eksempel har vi hvis a = –3 og b = 3. Vi forkaster implikasjonen $a^2 = b^2 \;\rightarrow\; a = b$.

La oss se på en implikasjon vi kan snu.

Reglene for løsning av ligninger forteller oss at vi kan godta implikasjonen

$a = b \;\rightarrow\; a + 1 = b + 1$ (hvis a = b, så er a + 1 = b + 1)

De samme reglene bekrefter også implikasjonen

$a + 1 = b + 1 \;\rightarrow\; a = b$ (hvis a + 1 = b + 1, så er a = b)

De to implikasjonene kan vi slå sammen til ekvivalensen

$a = b \;\leftrightarrow\; a + 1 = b + 1$

som vi leser "a = b hvis og bare hvis a + 1 = b + 1".

I en ekvivalens er rekkefølgen uten betydning. I matematikken sier vi at en operasjon er kommutativ (lat. commutare – bytte om på noe – tysk vertauschen) når rekkefølge ikke betyr noe. Den logiske operasjonen ekvivalens er kommutativ.

Det betyr at vi alternativt kan skrive slik:

$a + 1 = b + 1 \;\leftrightarrow\; a = b$ ("a + 1 = b + 1 hvis og bare hvis a = b").

Sannhetsverditabellen for ekvivalens bekrefter det:

Ekvivalens		
p	**q**	**p↔q**
g	g	s
g	s	g
s	g	g
s	s	s

Nå ser vi på et logisk uttrykk som bruker de to logiske operasjonene konjunksjon og implikasjon:

$a < b \wedge b < c \quad \rightarrow \quad a < c$

Uttrykket leser vi “hvis a er mindre enn b og b er mindre enn c, så er a mindre enn c”.

I implikasjonen $a < b \wedge b < c \quad \rightarrow \quad a < c$ er premisset konjunksjonen $a < b \wedge b < c$.

Sannhetsverditabellen til den logiske operasjonen konjunksjon ser slik ut:

Konjunksjon		
p	**q**	$\mathbf{p \wedge q}$
g	g	g
g	s	g
s	g	g
s	s	s

Den fjerde linjen forteller oss at premisset $a < b \wedge b < c$ er sant, bare hvis det både er sant at $a < b$ og at $b < c$.

Konklusjonen i implikasjonen $a < b \wedge b < c \quad \rightarrow \quad a < c$ er utsagnet eller påstanden $a < c$. Dersom premisset er sant, må konklusjonen være sann for at implikasjonen skal være sann. Det følger av den fjerde linjen i sannhetsverditabellen for implikasjon:

Implikasjon		
p	**q**	$\mathbf{p \rightarrow q}$
g	g	s
g	s	s
s	g	g
s	s	s

Skal vi godta implikasjonen $a < b \wedge b < c \quad \rightarrow \quad a < c$, eller skal vi forkaste den? Det ligger god logikktrening i at du prøver å svare på spørsmålet og begrunne svaret ditt.

Når vi utleder noe i matematikken (når vi gjennomfører et matematisk bevis), er det et absolutt krav at vi er helt sikre på alle overgangene, dvs. at vi er helt sikre på at alle implikasjonene er sanne. Hvis én eller flere er gal, kan også konklusjonen være gal. Enda verre er det da at andre kan bygge videre på den i den tro at konklusjon er sann.

For å gi deg ekstra trening i å være kritisk, skal vi ”bevise” at 7 = 5. Minst én av implikasjonene i ”beviset” må få sannhetsverdien gal. Hvilken/hvilke?

Vi tar utgangspunkt i utsagnet 2x = 2 og betrakter det som sant. Videre utleder vi slik (her passer det å la implikasjonspilen peke nedover):

$2x = 2$

$\downarrow$

$7x - 5x = 7 - 5.$

$\downarrow$

$7x - 7 = 5x - 5$

$\downarrow$

$7(x - 1) = 5(x - 1)$

$\downarrow$

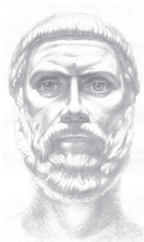
$$\frac{7(x-1)}{(x-1)} = \frac{5(x-1)}{(x-1)}$$

$\downarrow$

$7 = 5$ For sikkerhets skyld presiserer vi at denne konklusjonen er gal.

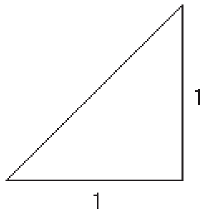
I ”beviset” foran er én implikasjon gal. Dermed kan vi ikke stole på konklusjonen.

Hvis vi kan stole på alle implikasjonene i en utledning (i et bevis), kan vi også stole på konklusjonen. Den kan da være premiss i et nytt bevis. Mye ny matematikk utledes på denne måten. Men det finnes flere andre måter å bevise på. En bevistype kalles bevis ved hjelp av en selvmotsigelse. Matematikere liker av og til å bruke latin. På ”latinsk” heter denne måten å bevise på reductio ad absurdum.



Vi tar med et klassisk eksempel på reductio ad absurdum. Eksemplet fører oss indirekte tilbake til Pytagoras. En kilde sier at han levde fra 569 f.Kr. til 469 f.Kr. Pytagoras innførte bevis som et krav i matematikken, men det slo tilbake. Et bevis må godtas enten en liker det eller ikke. Et bevis som virker harmløst på oss, ga Pytagoras problemer.

Problemet startet med følgende "uskyldige" lille rettvinklete trekant:

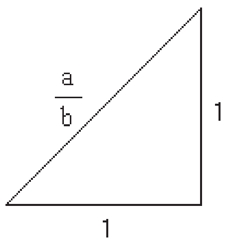


Pytagoras ville finne lengden på hypotenusen og forutsatte at den kan skrives på brøkform. Pytagoras trodde at alle tall kunne skrives som heltall eller brøker der telleren og nevneren er hele tall. Han kjente ikke til irrasjonale tall.

Noe redigert kan vi gå i fotsporene til Pytagoras og resonnere slik:

Vi forutsetter at hypotenuslengden kan skrives på brøkform og kaller foreløpig brøken, når den er ferdig forkortet, $\frac{a}{b}$.

Det gir følgende lengder på sidene i trekanten:



Herfra kan vi utlede slik:

Hypotenuslengden = $\frac{a}{b}$ $a \in N$ og $b \in N$ (a og b er positive hele tall). Brøken er ferdig forkortet.

↓ Pytagoras hadde allerede bevist at kvadratet av hypotenusen måtte ha måltall $1^2 + 1^2$ (Pytagoras' setning) og kunne bruke dette beviset slik:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1$$

↓

$$(\frac{a}{b})^2 = 2$$

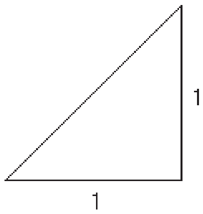
$\downarrow$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 2$$

$\downarrow$

$$\boxed{\frac{a \cdot a}{b \cdot b} = 2}$$

Vi har sett på den rettvinklete trekanten som har katetlengder 1 og forutsatt at lengden på hypotenusen kan skrives på brøkform. Vi har kalt brøken $\frac{a}{b}$ når den er forkortet så mye som mulig. Dersom vår forutsetning holder, er $\frac{a \cdot a}{b \cdot b} = 2$.



Men dette er en selvmotsigelse. Hvis brøken $\frac{a \cdot a}{b \cdot b}$ skal være lik 2, må telleren være dobbelt så stor som nevneren, og brøken må kunne forkortes. Men vi har forutsatt at brøken $\frac{a}{b}$ er forkortet så mye som mulig på forhånd. Den kan ikke forkortes mer. Da kan heller ikke brøken $\frac{a \cdot a}{b \cdot b}$ $(= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b})$ forkortes.

Hva nå? Har vårt arbeid med å utlede hypotenuslengden vært bortkastet, eller har vi fått vite noe interessant?

Vi har fått vite noe interessant.

Med utgangspunkt i en forutsetning har vi utledet noe som ikke kan være sant. Dersom vår forutsetning er korrekt, har vi fra noe sant utledet noe som er galt. Men det går ikke ifølge den tredje linjen i sannhetsverditabellen for implikasjon. Konklusjonen må derfor være at vår forutsetning er feil.

Vi har forutsatt at lengden på hypotenusen i en rettvinklet trekant med katetlengder 1, kan skrives på brøkform. Det må være galt. Dermed har vi bevist at lengden på denne hypotenusen ikke kan skrives på brøkform.

Denne måten å bevise på inviterer oss til å begynne med et hvilket som helst utsagn (med en hvilken som helst påstand). Dersom det vi kan utlede fra det er galt, har vi bevist at vårt utsagn er galt. Dermed har vi bevist "det motsatte", dvs. negasjonen. Hvis vi kaller utsagnet p, har vi bevist at $\neg$ p (ikke p) er sant.

Pytagoras fant en lengde som ikke kunne skrives på brøkform når han hadde valgt en gitt måleenhet. Vi tar med litt om hans reaksjon på det.

Pytagoras og medarbeiderne hans (pytagoreerne) så for seg en verden der alle forhold skulle kunne uttrykkes med hele tall – alt skulle kunne telles. "Alt er tall" var ett av deres motto. Brøker passer også inn her, brøker er bare en måte å skifte målenhet på. Sju femdeler angir for eksempel at vi har delt én enhet i fem, og at vi har sju av den nye enheten.

Det at alt skulle kunne telles, det at alt i verden var tellbart, var nærmest religion for pytagoreerne – det var nøkkelen til å forstå verden. Dermed ble det krise da de oppdaget at noen lengder ikke kan skrives på brøkform når en gitt måleenhet er valgt. De hadde ingen forklaring og reagerte med en slags panisk proteksjonisme. Inntil religionen kunne tilpasses den nye oppdagelsen, forsøkte de å holde oppdagelsen hemmelig. Det klarte de selvfølgelig ikke, og de klarte heller ikke å få orden på religionen sin.

I dag kaller vi tall som ikke kan skrives på brøkform, for irrasjonale tall. Hvis vi skulle prøve å skrive dem som desimalbrøk, ville vi aldri bli ferdige, de har uendelig mange desimaler tilsynelatende uten system i desimalrekkefølgen. Det mest berømte irrasjonale tallet er tallet π (pi), som forteller hvor mange ganger diameteren i en sirkel kan legges langs sirkelbuen. Tallet i eksemplet foran, måltallet for lengden på hypotenusen i den rettvinklete trekanter der begge katetene har lengde 1, er tallet $\sqrt{2}$, som vi leser "kvadratrota av to".

Pytagoras og medarbeiderne eller menigheten hans måtte leve videre med en skadeskutt religion, men andre greske matematikere isolerte de matematiske resultatene fra religionen og bygde videre på dem. Det resulterte i en blomstringstid for matematikken. Men problemet til Pytagoras påvirket den måten de greske matematikerne resonnerte på. De brukte en slags linjealgebra og utledet ny matematikk med linjal og passer. Når de tegnet en linje, kunne alle "se" lengden. Slik forsøkte de å omgå problemet med at noen lengder ikke kunne tallfestes med hele tall (eller brøker) når en gitt måleenhet var valgt.

Et annet klassisk reductio ad absurdum-bevis har med primtall å gjøre.

Godt kjennskap til primtallene og egenskapene til dem har gjort det mulig å kryptere data effektivt. Å kryptere data vil si å omskrive (kode) dem slik at det blir vanskelig for uvedkommende å få informasjon fra dem, samtidig som rette vedkommende lett kan omforme dem tilbake til sin opprinnelige form.

Den greske matematikeren Euklid, som levde omkring år 300 f.Kr., beviste at det finnes uendelig mange primtall. Beviset til Euklid går slik (vi har redigert det litt):

Vi begynner med å forutsette at det bare finnes et endelig antall primtall og kaller antallet n. De n primtallene kan vi kalle $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

Vi ser på tallet $q = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n) + 1$

Nå skal vi vurdere to muligheter: I q er et primtall.
II q er ikke et primtall.

I Hvis q er et primtall, så er vår forutsetning om at det bare finnes et endelig antall primtall, dvs. primtallene $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, feil. Hvis den er feil, så finnes det uendelig mange primtall.

II Hvis tallet q ikke er et primtall, så må det kunne faktoriseres i primtallsfaktorer. Det er da delelig på hver av sine primtallsfaktorer. Men her passer ingen av primtallene $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Dersom vi dividerer $q = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n) + 1$ på ett av dem, vil vi få 1 til rest. Det må derfor finnes andre primtall enn primtallene $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Også i dette tilfellet er vår forutsetning om at det bare finnes et endelig antall primtall, dvs. primtallene $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, feil. Hvis den er feil, så finnes det uendelig mange primtall.

Enten er tallet q et primtall, eller så er det ikke et primtall. Uansett om det ene eller det andre er tilfellet, har vi funnet at det må eksistere flere primtall enn de n stk., som vi forutsatte var alle. Det betyr at vår forutsetning om at det bare finnes et endelig antall primtall, er feil. Da må det finnes uendelig mange primtall.

Her slutter Euklids bevis. Matematikere bruker gjerne adjektivene elegant og vakkert om dette og lignende bevis.

Når noe er bevist, kaller vi konklusjonen teorem eller setning. Vi avslutter med et par påstander som ennå ikke er bevist. Kanskje blir en eller begge teorem en gang. Alternativt kan en eller begge negasjoene bli teorem – hva mener vi med det?

I Det finnes uendelig mange tvillingprimtall.
II Det finnes uendelig mange perfekte tall.

I Et primtall er alltid et oddetall. Ingen partall er primtall, fordi alle partall er delelig på 2. Den minst mulige avstanden mellom to primtall er derfor 2. Primtall som har denne avstanden, kalles tvillingprimtall. 5 og 7 er et eksempel på tvillingprimtall. 17 og 19 er et annet. 1 000 000 000 061 og 1 000 000 000 063 er enda et. En tror at det også finnes uendelig mange tvillingprimtall, men til nå har ingen klart å bevise eller motbevise det.

II Et perfekt tall er et tall som er lik summen av sine divisorer, dvs. de tallene (inklusive tallet 1) som tallet er delelig på.

6 og 28 er perfekte tall fordi

1, 2 og 3	går opp i 6	og	$1 + 2 + 3 = 6$
1, 2, 4, 7 og 14	går opp i 28	og	$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

Matematikere har gjennom tidene lett etter nye perfekte tall, men funnet få og bare partall. Fram til 1997 hadde en bare funnet tretti perfekte tall. Det største har 130 000 siffer, men kan kort skrives slik:

$$2^{216\,090} \cdot (2^{216\,091} - 1)$$

Hvorvidt det bare finnes et endelig antall perfekte tall og i tilfellet hvilke eller om det finnes uendelig mange, venter fortsatt på en avklaring. Fordi en til nå bare har funnet perfekte partall, og fordi ingen har bevist at et oddetall ikke kan være et perfekt tall, er det også uavklart om det finnes perfekte tall som er oddetall.

Den matematikken de greske matematikerne utledet med passer og linjal og inspirert av beviskravet til Pytagoras, ble grunnlaget for vår matematikk. Under forteller vi en av årsakene til det. Mer om utviklingen av vår matematikk kan du lese i kapitlet ”Glimt fra matematikkens historie”.

Grunnlaget og utgangspunktet for dagens matematikk er gresk geometri eller linjealgebra slik den så ut for over to tusen år siden. Dette skyldes spesielt én bok. Boka heter Elementer og er skrevet av grekeren Euklid, som levde omkring år 300 f.Kr. Boka inneholder tretten kapitler. Årsaken til at denne boka ble bevart for ettertiden, kan du lese om i kapitlet ”Glimt fra matematikkens historie”.

I Elementer samlet Euklid så å si hele den matematikken som var utviklet og kjent på hans tid. Boka dekket det nivået som matematikken hadde nådd ("the state of the art") så grundig og fullstendig at den nærmest overflødiggjorde tidligere matematikkbøker. Noen er likevel bevart, og noen kjenner vi av omtale, men mange er sikkert gått tapt.

Matematikken i Elementer er geometrisk. Tall blir oppfattet som linjer av forskjellige lengder, og matematiske forhold blir vist og bevist ved hjelp av passer og linjal og geometriske figurer.

Beviskravet som Pytagoras hadde innført, er sentralt i Elementer. Men for å kunne bevise eller motbevise gyldigheten av den til da kjente matematikken, trengte Euklid et utgangspunkt eller et ståsted. Utgangspunktet ble en del påstander som han presenterte uten bevis. De var ment å være selvinnlysende sannheter. Ved å stole på dem og bruke dem til å bevise matematiske forhold, som igjen ble brukt til å bevise nye forhold, kunne han sortere ut den delen av den kjente matematikken som (i forhold til utgangspunktet) holdt mål og også utlede ny matematikk. Metoden kaller vi "den deduktive metoden". Et leksikon definerer slik:
” deduksjon (av lat. deductio, utledning), avledning, slutning fra det allmenne (generelle) til det enkelte (spesielle); dedusere, avlede; deduktiv, som bygger på deduksjon. I logikken bevisføring som går ut på at man fra gitte premisser slutter til en bestemt konklusjon. Klassisk form: syllogisme.”.

I den deduktive metoden kaller vi de innledende påstandene (premissene) som skal godtas uten bevis, og som hele "byggverket" hviler på, for **aksiom**. Forhold som er bevist, kalles gjerne **teorem** eller **setninger**. Et eksempel er Pytagoras’ setning.

Vi avslutter med aksiomene til Euklid:

1 En linje kan trekkes fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst punkt.

2 En linje kan forlenges i det uendelige.

3 En sirkel kan tegnes med et hvilket som helst sentrum og en hvilken som helst radius.

4 Alle rette vinkler er like store.

Det femte aksiomet er tyngre:

5 Når en rett linje skjærer to rette linjer, og de innvendige vinklene på den samme siden til sammen er mindre enn to rette vinkler, så møtes de to linjene, når de forlenges ubegrenset, på den siden hvor de to vinklene ligger, som er mindre enn to rette.

Dette var en tung setning, men ved "å tygge på den", kommer vi fram til at den indirekte forteller oss hvordan vi kan finne ut om to linjer kommer til å møtes eller ikke. Hvis de aldri møtes, sier vi at de er parallelle. Det femte aksiomet kalles også parallell-aksiomet.

I den første halvdelen av det forrige århundret undersøkte en hvordan geometrien ville se ut dersom en så bort fra parallell-aksiomet. Det resulterte i en del nye geometrier som vi med et fellesnavn kaller **ikke-euklidske geometrier**, for eksempel den som gjelder på en kuleflate, og den som gjelder i det firedimensjonale rommet, som relativitetsteorien til Albert Einstein forteller oss om.

De fem aksiomene sier noe om vinkler, linjer og sirkler på en plan flate. I tillegg satte Euklid opp fem "generelle påstander" og sa at de var gyldige for alle typer størrelser:

1 Størrelser som er like store som en gitt størrelse, er like store.

2 Når like størrelser adderes til like størrelser, er summene like store.

3 Når like størrelser subtraheres fra like størrelser, er differansene like store.

4 Størrelser som dekker hverandre, er like store.

5 Det hele er større enn en del av det.

De generelle påstandene ble heller ikke bevist, og vi kan derfor også kalle dem aksiom.

Matematikkens utvikling fram til dagens matematikk er på mange måter et eventyr, og dette eventyret startet altså med ti aksiom og den deduktive metoden. Utrolig kanskje, men sant. Og ingen har til nå fått høre slutten på dette eventyret.

Vi avrunder med en kort innføring i mengdelære. Mengdelæren er en variant av logikken til Aristoteles. Boolsk algebra er en annen. Den er tema i det neste kapitlet.

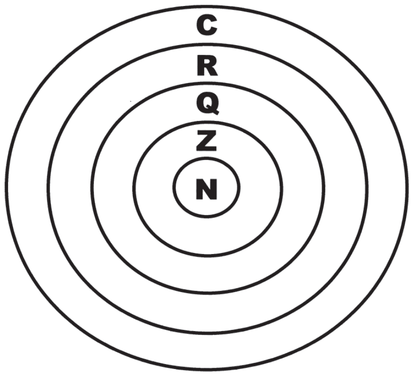
En kort innføring i mengdelære

En samling av et eller annet kan vi kalle en mengde. Det som er med i mengden kaller vi i mengdelæren for elementene i mengden. En kortstokk kan vi for eksempel se på som en mengde av 52 kort. Hvert kort er da et element i mengden, og mengden består av (inneholder) 52 element.

Symbolet for element er $\in$. Formuleringen ”hjerter 7 $\in$ mengden av alle kortene i stokken” leser vi: ”hjerter 7 er element i mengden av alle kortene i stokken”.

Vi kan se på noen elementer i en mengde som en egen mengde. Vi kaller den da en delmengde. Mengden av alle hjerterkortene (den har 13 element) er for eksempel en delmengde av 52-elementsmengden som inneholder alle kortene i stokken. En annen delmengde kan være mengden av alle bildekort (knekt, dame og konge). Den inneholder $3 \cdot 4 = 12$ element. Symbolet for delmengde er $\subset$. Formuleringen ”mengden av alle hjerterkort $\subset$ mengden av alle kortene i stokken” leser vi følgelig: ”mengden av alle hjerterkort er en delmengde av mengden av alle kortene i stokken”.

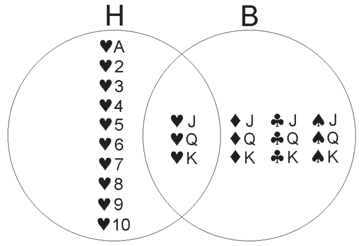
Se på skissen til høyre.



Den illustrerer at mengden av de naturlige tallene (N) er en delmengde av mengden av de hele tallene (Z), som igjen er en delmengde av mengden av de rasjonale tallene (Q), som igjen er en delmengde av mengden av de reelle tallene (R), som igjen er en delmengde av mengden av de komplekse tallene (C).

Med delmengdesymbolet $\subset$ kan vi si det samme slik: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

Tilbake til kortmengdene. Dersom vi vil studere mengden av alle hjerterkortene og mengden av alle bildekortene sammen, kan vi illustrere dem slik:

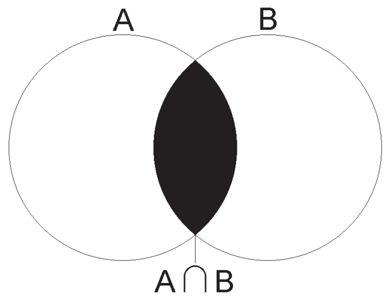


Slike mengdeillustrasjoner kalles venndiagram etter John Venn som først brukte dem. I venndiagram blir elementene i mengder rammet inn i den figurtypen som passer. Ofte er det sirkler eller rektangler.

I mengdealgebra er det vanlig å navngi mengder med store bokstaver. Her har vi kalt mengden av alle hjerterkortene H og mengden av alle bildekortene B.

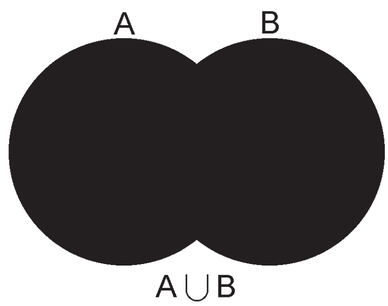
Av diagrammet ser vi at tre element (♥J, ♥Q og ♥K) er element i begge mengdene. Disse tre elementene utgjør en ny mengde som vi kaller snittmengden eller bare snittet mellom H og B. Symbolet for snittmengde er $\cap$. Den nye mengden kalles H $\cap$ B som leses ”H snitt B” eller ”H OG B”.

Med venndiagram kan vi illustrere snittet mellom to vilkårlige mengder A og B, dvs. mengden A $\cap$ B, dvs. mengden av de elementene som er med i A OG i B, slik:



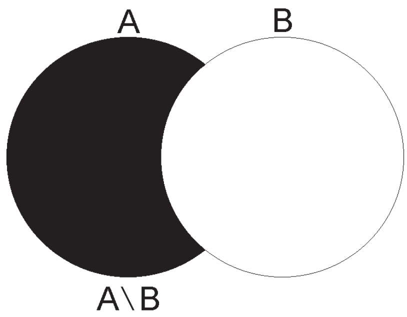
Snitt er en måte å kombinere to eller flere mengder. Union og differensmengde er andre.

Et venndiagram for unionen mellom to vilkårlige mengder A og B er slik:



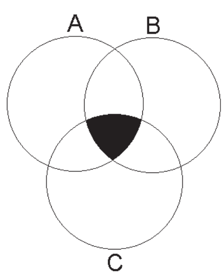
Symbolet for union er $\cup$. A $\cup$ B leses ”A union B” eller ”A ELLER B”. Unionen mellom to mengder A og B er mengden av de elementene som er med i A ELLER i B ELLER i begge.

Symbolet (operatoren) for differansen mellom to mengder er \. Et venndiagram for A \ B ser slik ut:

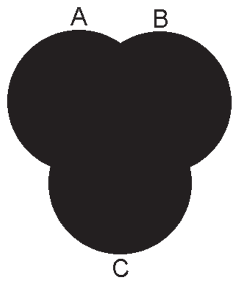


Differensmengden A \ B er mengden av de elementene som er med i A, men IKKE i B.
A \ B kan vi lese ”A minus B” eller ”A IKKE B”.

Snitt og union mellom tre mengder kan vi illustrere slik:

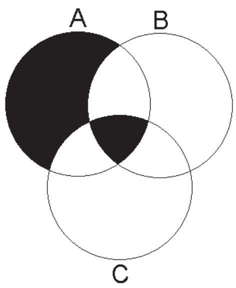


$A \cap B \cap C$



$A \cup B \cup C$

Vi avslutter med et eksempel som viser at mengdeuttrykk (logiske uttrykk) kan være mer komplekse.



De sorte områdene kan med mengdealgebra angis på flere måter. Her er to:

$((A \setminus B) \cap (A \setminus C)) \cup (A \cap B \cap C)$

$(A \setminus (B \cup C)) \cup (A \cap B \cap C)$

I uttrykkene gjelder følgende prioriteter:

Prioritet		
1.	Parenteser	
2.	Differensmengde	$\setminus$
3.	Snitt	$\cap$
4	Union	$\cup$

Det betyr at den første versjonen sist på den forrige siden kan omformes til et uttrykk uten parenteser, og at én er nok i den andre:

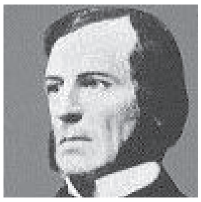
$A \setminus B \cap A \setminus C \cup A \cap B \cap C = A \setminus (B \cup C) \cup A \cap B \cap C$

Det finnes regler for å omskrive (forenkle) større uttrykk. I eksemplet over har vi brukt regelen

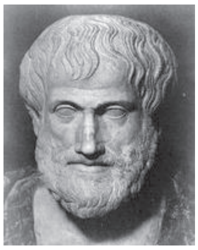
$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

Flere regler finner du i det neste kapitlet om boolsk algebra.

Boolsk algebra (boolean algebra)



Adjektivet boolsk er avledet av navnet til den engelske matematikeren George Boole, som i 1854 publiserte "An investigation of the Laws of Thought". Denne boka er på mange måter en bearbeiding av det logiske systemet (den logikken) som grekeren Aristoteles satte opp regler for over 300 år f.Kr. Et leksikon presenterer Aristoteles slik:



"Aristoteles, 384–322 f.Kr., gresk filosof og naturforsker, oldtidens mest allsidige vitenskapsmann og sammen med Platon den greske filosof som sterkest har påvirket ettertiden. Elev av Platon og lærer for Aleksander den store, grunnla senere sin egen skole i Athen (den peripatetiske); døde i landflyktighet.
De av hans skrifter som er bevart, er mest i form av forelesningsnotater. Hans logiske skrifter (Organon) omhandler bl.a. syllogismelæren. I metafysikken kritiserte han Platons idélære og mente at ideene ikke hadde selvstendig virkelighet, men eksisterte i tingene som deres vesen eller form. I etikk hevdet han bl.a. læren om «den gylne middelvei». Skrev også om estetikk, psykologi og statskunnskap. Via arabiske filosofer (Avicenna, Averroës) ble han gjenoppdaget i middelalderen, og hans tanker preget katolsk teologi, særlig gjennom Thomas Aquinas.
Som naturforsker regnes Aristoteles som grunnleggeren av biologien, særlig systematisk biologi. Hans astronomiske og fysiske teorier samt hans metodesyn, dominerte europeisk vitenskap i nesten 2000 år."

Aristoteles inspirerte George Boole, som igjen inspirerte amerikaneren Claude E. Shannon. I 1938 påviste Shannon en svært effektiv måte å bruke ideene til Boole på i forbindelse med konstruksjon av koblingskretser. Derfor har vi i dag et matematisk logikksystem som har fått betegnelsen "boolsk algebra". Denne algebraen kan brukes til å konstruere kretsene i PC-er og andre produkt, slik at de blir svært økonomiske både med hensyn på tid (kortest mulig behandlingstid) og penger (færrest mulig komponenter/transistorer).

Det logiske systemet du leser om her, kan brukes i mange sammenhenger, for eksempel når du skal søke effektivt på nettet, hvis du skal programmere et regneark med litt avanserte HVIS-formler og hvis du skal skrive et datamaskinprogram med litt avanserte IF-kommandoer. Det kan også brukes til å formulere argument slik at de blir lette å forstå når du diskuterer.

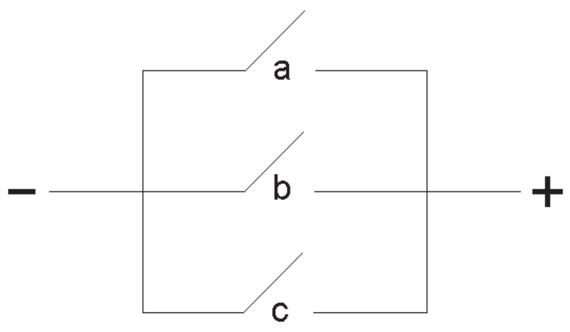
Når vi regner boolsk eller logisk, kan vi bruke de to verdiene 0 og 1, og vi kan utføre de tre operasjonene logisk addisjon, logisk multiplikasjon og logisk komplementering. Alternative betegnelser er disjunksjon, konjunksjon og negasjon.

De tre logiske operasjonene defineres slik:

Logisk addisjon (disjunksjon):	0	+	0	=	0
	0	+	1	=	1
	1	+	0	=	1
	1	+	1	=	1

Dersom addisjonen inneholder flere operander, er summen 1 hvis minst en av operandene er 1. Hvis alle er 0, er summen 0.

Kretsen under kan være et bilde på en logisk addisjon:



Kretsen forteller samtidig hvorfor plusstegnet i en logisk addisjon ofte uttales "ELLER". Kretsen leder strøm hvis a eller b eller c lukkes (hvis én eller flere porter lukkes).

Den siste linjen i definisjonen av operasjonen logisk addisjon er slik:

1 + 1 = 1

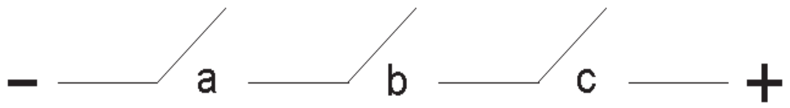
Den understreker at boolsk regning ikke er det samme som å regne med binære verdier, selv om begge systemene bare bruker verdiene 0 og 1. I det binære tallsystemet er 1 + 1 = 10.

Logisk multiplikasjon (konjunksjon):

0	·	0	=	0
0	·	1	=	0
1	·	0	=	0
1	·	1	=	1

Flere faktorer kan godt forekomme. Produktet er 1 bare hvis samtlige faktorer er 1.

En krets for logisk multiplikasjon kan se slik ut:



Kretsen forteller samtidig hvorfor multiplikasjonstegnet i en logisk multiplikasjon ofte uttales ”OG”. Kretsen leder strøm hvis a og b og c lukkes.

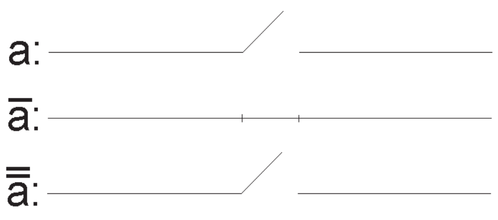
Logisk komplementering (negasjon):

$$\overline{0} = 1$$
$$\overline{1} = 0$$

Komplementet til en logisk verdi er den ”motsatte” verdien. Komplementet til 0 er 1 , og komplementet til 1 er 0. Negasjonsoperatoren ($\overline{}$) kan vi uttale ”IKKE”. Ikke 0 er 1, og ikke 1 er 0.

Dersom vi komplementerer (negerer) to ganger, kommer vi tilbake til utgangspunktet.
$\overline{\overline{1}} = 1$. Ikke ikke 1 = ikke (ikke 1) = ikke 0 = 1

Dersom vi også her skal sette opp et kretsbilde, kan det bli slik:



Prioritetsreglene

Når vi regner vanlig aritmetisk, beregner vi uttrykk etter følgende prioritetstabell:

Prioritet	**Operasjon**
1.	Parenteser
2.	Opphøyd i (potenser)
3.	Multiplikasjoner og divisjoner
4.	Addisjoner og subtraksjoner

Den tilsvarende prioritetstabellen for logisk regning er slik:

Prioritet	**Operasjon**	
1.	Parenteser	
2.	Logisk komplementering	Negasjon
3.	Logisk multiplikasjon	Konjunksjon
4.	Logisk addisjon	Disjunksjon

Det gir for eksempel at uttrykket $0 \cdot (\overline{1} + \overline{0}) \cdot 1$ beregnes slik:

$$0 \cdot (\overline{1} + \overline{0}) \cdot 1 = 0 \cdot (0 + 1) \cdot 1 = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

Uttrykket $0 \cdot \overline{1} + \overline{0} \cdot 1$ beregnes slik:

$$0 \cdot \overline{1} + \overline{0} \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1$$

To vilkårlige logiske variabler X og Y kan anta følgende fire verdikombinasjoner:

X	Y
0	0
0	1
1	0
1	1

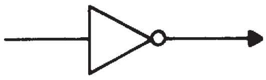
For å få vite verdien av uttrykket $X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$ for hver av de fire verdikombinasjonene, kan vi sette opp en slik tabell:

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$X \cdot \overline{Y}$	$\overline{X} \cdot Y$	$X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

Linje nr. 2 i tabellen (X = 0 og Y = 1) bekrefter at det uttrykket vi beregnet foran, $0 \cdot \overline{1} + \overline{0} \cdot 1$, er lik 1.

Kretskonstruksjon

Det er forholdsvis enkelt å konstruere elektroniske kretser som kan utføre logisk addisjon, logisk multiplikasjon og logisk komplementering. Aktuelle norske betegnelser på disse tre kretstypene er ELLER-port, OG-port og IKKE-port. De amerikanske betegnelsene er OR-gate, AND-gate og NOT-gate. Her har American National Standards Institute vedtatt følgende symbol:

Symbol	Betydning
	**Representerer en krets som utfører logisk addisjon, dvs. en ELLER-port (OR-gate)**
	**Representerer en krets som utfører logisk multiplikasjon, dvs. en OG-port (AND-gate)**
	**Representerer en krets som utfører komplementering, dvs. en IKKE-port (NOT-gate, inverter)**

Ved å bruke elementærkretsene ELLER, OG og IKKE som "byggesteiner", kan vi konstruere større kretssystemer, som kan utføre de nødvendige funksjonene i en datamaskin og i systemer som automatiserer forskjellige prosesser.

Halvadderer og heladderer

Først skal vi se hvordan elementærkretsene ELLER, OG og IKKE kan brukes til å konstruere en krets som kan summere to ensifrete binære tall X og Y. En slik krets kalles en halvadderer.

I totallsystemet (det binære tallsystemet) er 0+0=0, 0+1=1, 1+0=1 og 1+1=10. Summen kan altså bli tosifret. Dersom vi kaller det første sifferet mentesiffer (M) og det siste sumsiffer (S), skal altså de fire mulige XY-kombinasjonene gi følgende M og S:

X	Y	M	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

En brukbar oppskrift for å konstruere kretsen får vi hvis vi klarer å sette opp to logiske uttrykk U_M og U_S som bare inneholder de to variablene X og Y, og som utregnet for de fire XY-kombinasjonene gir henholdsvis M-verdiene og S-verdiene i tabellen foran.

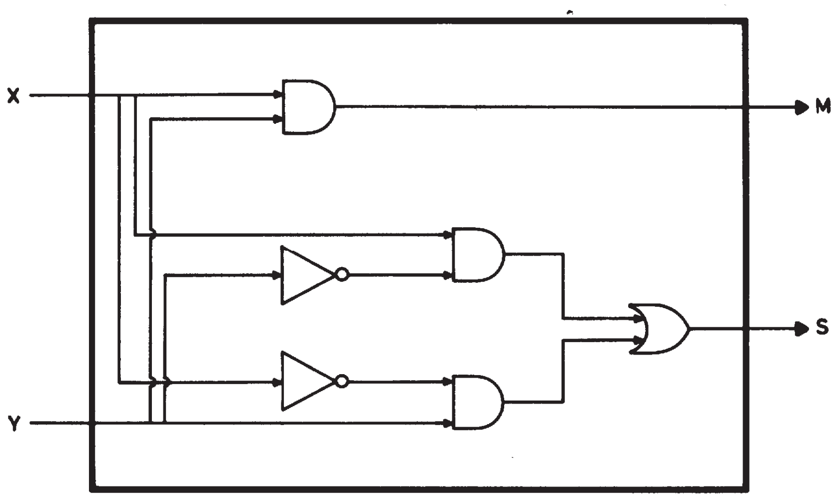
Vi har allerede en mulig versjon av U_S. Det er uttrykket $X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$.

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$X \cdot \overline{Y}$	$\overline{X} \cdot Y$	$X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

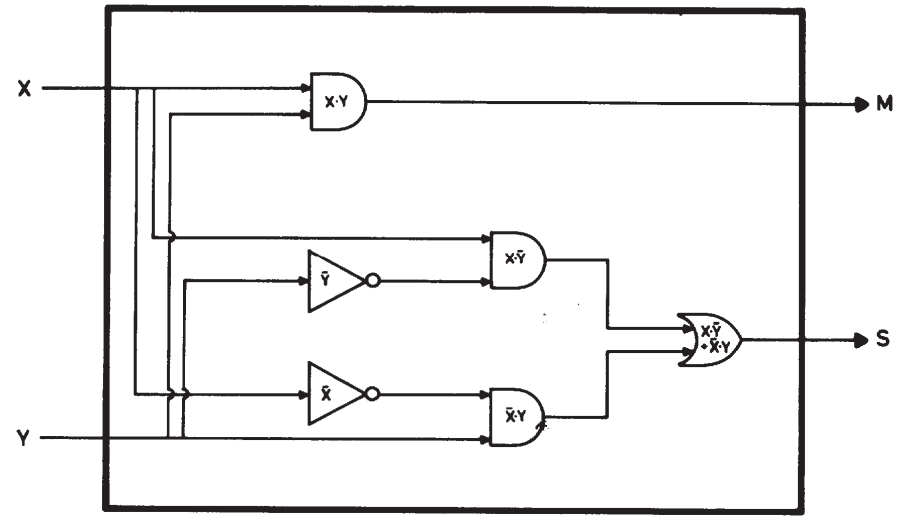
Vi kan altså bruke $U_S = X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$.

U_M er enklere å sette opp fordi de verdiene vi ønsker, er de verdiene som definerer operasjonen logisk multiplikasjon. Vi kan altså bruke $U_M = X \cdot Y$.

Et kart for en krets som skal addere to binære siffer, kan vi nå tegne slik:



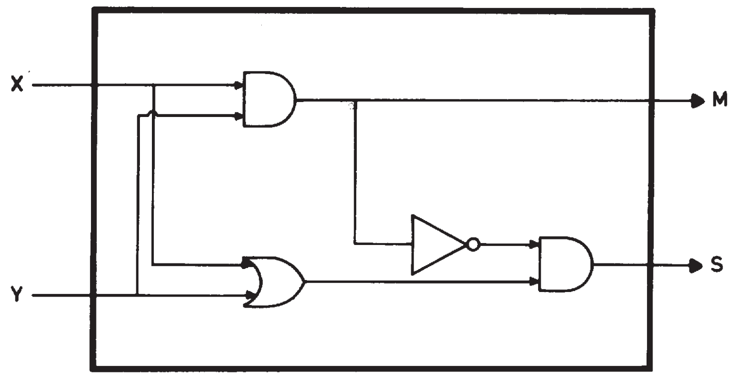
Fordi dette er vårt første møte med slike kretskart, tar vi det en gang til med de aktuelle logiske uttrykkene.



Et alternativt uttrykk for U_S er $(X+Y)\cdot(\overline{X\cdot Y})$. Tabellen under bekrefter det.

X	Y	$X+Y$	$X\cdot Y$	$\overline{X\cdot Y}$	$(X+Y)\cdot(\overline{X\cdot Y})$
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

Det betyr at den kretsen vi ønsker, også kan konstrueres slik:



Begge alternativene foran tilfredsstiller vårt kretsbehov, men vi velger den siste fordi den bare kreve fire grunnkomponenter.

Godt kjennskap til boolsk algebra kan altså ikke bare gi kretsoppskrifter, men er også et effektivt hjelpemiddel for å gjøre disse kretsene enklest mulig.

Det finnes flere teknikker for å komme fram til de beste logiske uttrykkene. Vi skal ikke utdype teknikkene her, men tar med noen omskrivningsregler som kan være nyttige for å omskrive logiske uttrykk slik at kretsene trenger færre grunnkomponenter. X, Y og Z er logiske variabler som kan være 0 eller 1.

1	$0 + X = X$		
2	$1 + X = 1$		
3	$X + X = X$		
4	$X + \overline{X} = 1$		
5	$0 \cdot X = 0$		
6	$1 \cdot X = X$		
7	$X \cdot X = X$		
8	$X \cdot \overline{X} = 0$		
9	$X + Y = Y + X$	←	Logisk addisjon (disjunksjon) er kommutativ.
10	$X \cdot Y = Y \cdot X$	←	Logisk multiplikasjon (konjunksjon) er kommutativ.
11	$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z = X + Y + Z$		
12	$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot Y \cdot Z$		
13	$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$		
14	$X + X \cdot X = X$		
15	$X \cdot (X + Y) = X$		
16	$(X + Y) \cdot (X + Z) = X + Y \cdot Z$		
17	$X + \overline{X} \cdot Y = X + Y$		
18	$X \cdot Y + Y \cdot Z + \overline{Y} \cdot Z = X \cdot Y + Z$		
19	$(\overline{X + Y}) = \overline{X} \cdot \overline{Y}$		
20	$(\overline{X \cdot Y}) = \overline{X} + \overline{Y}$		

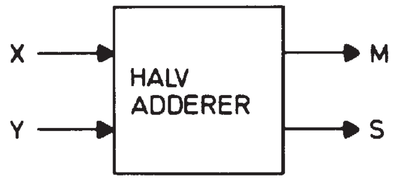
De to siste

$$(\overline{X + Y}) = \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

$$(\overline{X \cdot Y}) = \overline{X} + \overline{Y}$$

blir gjerne kalt ”De Morgans lover”.

Den kretsen vi tegnet i to versjoner foran, kalles en halvadderer. På et mindre detaljert nivå kan den illustreres slik:



En heladderer er en krets som mottar tre binære siffer, M_i (mente inn), X og Y og leverer summen gjennom sifrene M_u (mente ut) og S.

Kretsen skal ta imot tre binære verdier. Det gir $2^3 = 8$ mulige kombinasjoner. For å få med alle, kan vi telle binært inntil vi har "brukt opp" tre sifferposisjoner.

000	=	0
001	=	1
010	=	2
011	=	3
100	=	4
101	=	5
110	=	6
111	=	7

De summene kretsen skal levere, er altså følgende:

0 + 0 + 0 = 00
0 + 0 + 1 = 01
0 + 1 + 0 = 01
0 + 1 + 1 = 10
1 + 0 + 0 = 01
1 + 0 + 1 = 10
1 + 1 + 0 = 10
1 + 1 + 1 = 11

Det kretsen skal gjøre, kan illustreres slik i tabell:

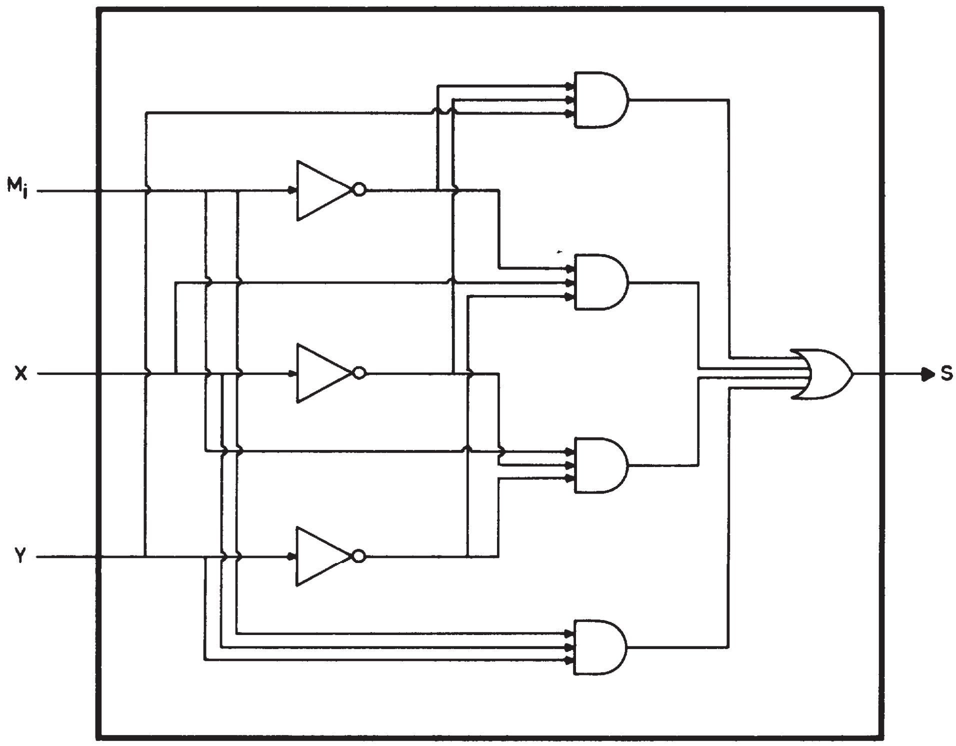
M_i	X	Y	M_u	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Uttrykk for M_u og S kan være følgende: $U_{M_u} = \overline{M_i} \cdot X \cdot Y + M_I \cdot \overline{X} \cdot Y + M_i \cdot X \cdot \overline{Y} + M_i \cdot X \cdot Y$

$$U_S = \overline{M_i} \cdot \overline{X} \cdot Y + \overline{M_i} \cdot X \cdot \overline{Y} + M_i \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} + M_i \cdot X \cdot Y$$

Kontroller det i tabell hvis du har lyst.

Uttrykkene U_{M_u} og U_S gir oss en "konstruksjonstegning" for å lage en heladderer. Dersom vi velger denne tegningen, vil den delen av kretsen som leverer S, bli slik:



Vi tar ikke med den delen av kretsen som leverer M_u, fordi det finnes uttrykk som gir bedre ”konstruksjonstegninger”, for eksempel følgende:

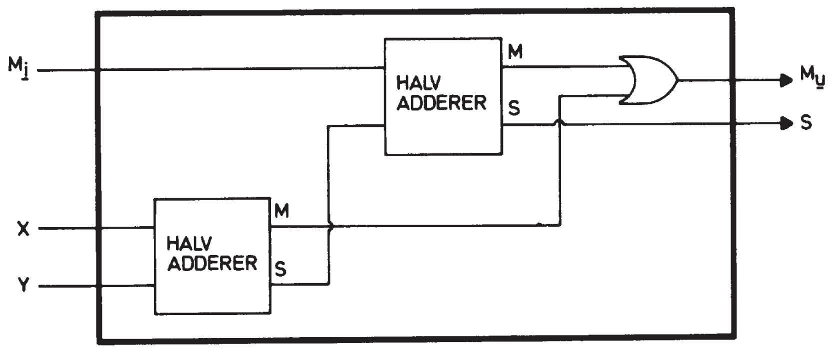
$$U_{M_u} = M_I \cdot (X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y) + X \cdot Y$$

$$U_S = M_i \cdot \overline{(X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y)} + \overline{M_i} \cdot (X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y)$$

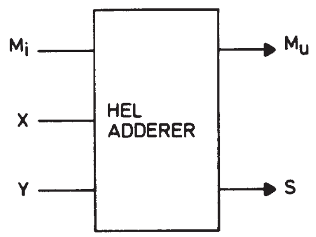
Her kjenner vi igjen uttrykket $X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$ som vi brukte for å lage sumsifferet S i en halvadderer. Vi kaller uttrykket $X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$ for U, og omskriver slik:

$$U_{M_u} = M_I \cdot U + X \cdot Y$$
$$U_S = M_i \cdot \overline{U} + \overline{M_i} \cdot U$$

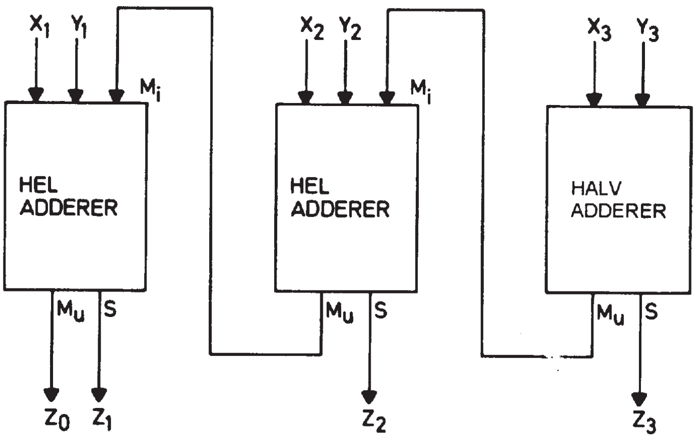
Dette betyr at en heladderer kan konstrueres slik:



Mindre detaljert kan en heladderer, uansett konstruksjonsløsning, illustreres slik:



Dersom vi for eksempel ønsker en krets som adderer to positive binære tresifrete heltall, kalt henholdsvis $X_1X_2X_3$ og $Y_1Y_2Y_3$, kan vi nå konstruere denne kretsen. Summen skal uttrykkes som en firesifret binær verdi $Z_1Z_2Z_3Z_4$.



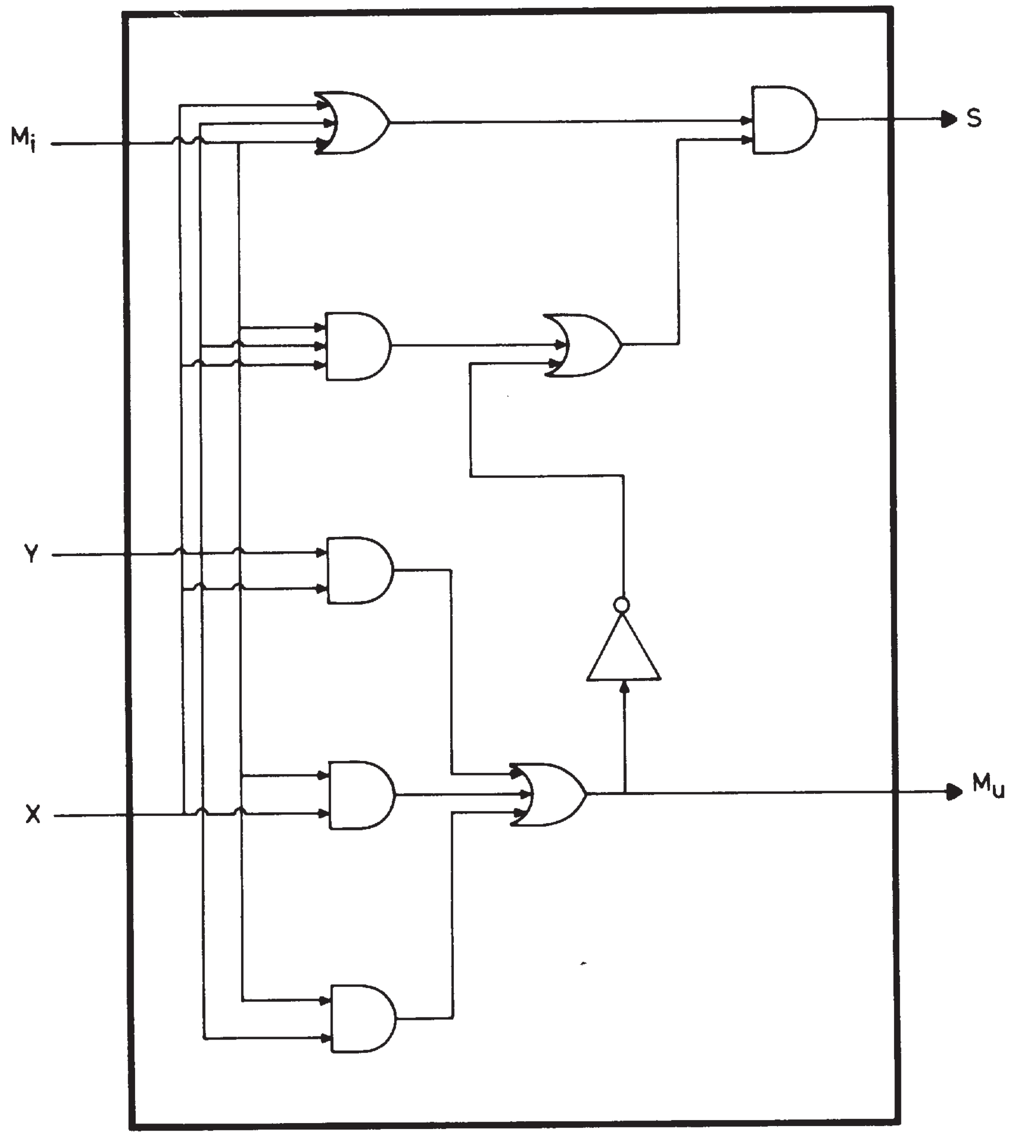
Vi avslutter med et eksempel på at boolsk algebra eller logikk også kan brukes i dagligtale.

De Morgans lov $\overline{(X+Y)} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$ forteller oss at følgende utsagn betyr det samme:

"Turen avlyses hvis det regner eller er kaldt." = "Det blir tur hvis det ikke regner og ikke er kaldt."

ØVINGSOPPGAVER

1 Hvilket logisk uttrykk representerer kretsen under. Sett opp tabell og få bekreftet at kretsen er en heladderer.



2 Med tre binære siffer kan vi telle fra 0 til 7:

000	=	0
001	=	1
010	=	2
011	=	3
100	=	4
101	=	5
110	=	6
111	=	7

Kontroller at dersom vi sender et tresiftret binært tall $X_1X_2X_3$ inn i kretsen, så vil bare den utgangen som representerer den tilsvarende desimale verdien, få den logiske verdien 1 (lede strøm).